Об арифметических свойствах интегралов дифференциальных уравнений первого порядка типа Пенлевэ.

Д. Мордухай-Болтовской (Ростов н. Д.).

§ 1. В настоящей работе [1]) мы задаемся целью вывести некоторые *арифметические* свойства голоморфных разложений

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots . a_nx^n + \dots \dots \tag{1}$$

с рациональными коэффициентами a_j или вообще разложений *алгеброидального* типа

$$y = x^{-\frac{e}{d}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\frac{j}{d}}, \tag{2}$$

определяющих интеграл дифференциального уравнения первого порядка Пенлевэ [2]).

Такое исследование, находясь в тесной связи с теоремой Эйзенштейна, работами Гурвича [3]) и моими [4]), относящимися к разложениям, определяющим интегралы алгебраических дифференциальных уравнений, а также теоремой Чебышева, высказанной им в 1882 году [5]) и доказанной мной в 1924 году [6]), открывает путь в области совершенно новые, обнаруживает связь между характером особенных точек на круге сходимости и чисто арифметическими свойствами коэффициентов в то время, как работы Хадамара [7]) и его школы [8]) устанавливают такую связь *с характером убывания этих коэффициентов.*

---

[1]) Очень краткая и потому трудно понятная для читателя заметка об этом имеется в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Avril 1924. Настоящая работа дает полное доказательство и при этом упрощенное основной теоремы и еще некоторые обобщения.

[2]) Painlevé. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. Paris, 1897. Также в Annales de l'Ecole Normale, t. 13 (1891). Painlevé. Sur les équations diff. du premier ordre.

[3]) Hurwitz. Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation diff. algébrique. Annales de l'Ecole Normale, t. VI, III S. 1889.

[4]) Д. Мордухай-Болтовской. О некоторых арифметических свойствах решений алгебр. диффер. уравнений. Матем. Сборник. 1910.

[5]) Hermite. Cours d'Analyse litographié. 1882.

[6]) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences. 1926. Bulletin des Sciences Mathém., 2-me série, t. L, nov., dec. 1926.

[7]) Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique, 1901 и другие его работы.

[8]) Работы Leau. C. R. 1898, 1899. Fabry. Ann. de l'Ec. Normale, 3-me. Série, t. XIII, 1896. И. Брайцев. Об особых точках аналитических функций. Изв. Варш. Пол. Инст. 1915. Там и библиография по этому вопросу.

Но такого рода исследования являются возможными только вследствие результатов, полученных Пенлевэ, относящихся к его уравнениям, т. е. уравнениям с интегралами, принимающими *определенное число значений около неподвижных особенных точек.* Следует здесь отметить, что эти уравнения и с классической *операционной* точки зрения имеют важное значение. А именно из моих исследований [9]) следует, что, если интеграл (я называю: решение) алгебраического дифференциального уравнения первого порядка

$$f(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

выражается в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных (причем тот же результат имеет место и при интегрировании в *квадратурах*), то уравнение обязательно принадлежит к типу Пенлевэ.

Таким образом в силу результатов, полученных Пенлевэ, вопрос об интегрировании с помощью элементарных трансцендентных (а также в квадратурах) сводится к вопросу об интегрировании уравнения Рикатти с алгебраическими коэффициентами и наконец линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\alpha_0(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y = 0\ ,$$

которое в случае рациональных $\alpha_j(x)$ решается конечным числом алгебраических операций [10]), а в случае вообще алгебраических $\alpha_j(x)$ сводится к проблеме выражения Абелевых интегралов через логарифмы.

§ 2. Теперь напомним общие положения Пенлевэ, относящиеся к *алгебраическому* дифференциальному уравнению с *конечным* числом значений интеграла около критических точек.

По Пенлевэ возможен только один из следующих трех случаев:

1) y алгебраическая функция от x,

2) y алгебраическая функция x и η, определяемого уравнением:

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} = g(x)dx\ , \tag{4}$$

3) y алгебраическая функция x и η, определяемого уравнением Рикатти

$$a(x)\eta' + b(x)\eta^2 + c(x)\eta + d(x) = 0, \tag{5}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ *алгебраические* функции.

В общем случае, когда нет условия алгебраичности коэффициентов ур. (3), в формулировке выражение: алгебраическая функция от x следует заменить *алгебраическая функция коэффициентов y'* и y в ур. (3). Относительно ур. (5) здесь необходимо сделать замечание, важное для последующего.

Полагая
$$\frac{b(x)}{a(x)}\eta = \xi\ ,$$

[9]) Д. Мордухай-Болтовской. Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде диффер. уравнений первого порядка. Сооб. Хар. Мат. Об. ст. I, 1910, ст. II, 1907.

[10]) Д. Мордухай-Болтовской. Об интегрировании в конечном виде линейных дифференц. уравнений. Изв. Варш. Унив. За 1910 и другие работы.

это уравнение легко приводим к уравнению

$$\alpha(x)(\xi' + \xi^2) + \beta(x)\xi + \gamma(x) = 0. \tag{6}$$

где

$$\alpha(x) = a^2(x),$$

$$\beta(x) = a'(x)a(x) - b'(x)b(x) + c(x)a(x),$$

$$\gamma(x) = d(x)b(x),$$

также, как и $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, алгебраические функции от x.

Полагая еще

$$\zeta = e^{\int \xi dx}, \tag{7}$$

последнее уравнение приводим к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с алгебраическими коэффициентами:

$$\alpha(x)\zeta'' + \beta(x)\zeta' + \gamma(x)\zeta = 0 \tag{8}$$

§ 3. Как и в других наших работах, мы будем пользоваться следующими обозначениями.

Если A целое число, то $\bar{p}(A)$ наибольший простой делитель, входящий в A, $\lambda p(A)$ — показатель делителя p в A, который будем также обозначать просто $\lambda(p)$ или $\lambda_n(p)$; da_n знаменатель дроби a_n, всегда предполагаемой сокращенной, так что $\bar{p}(da_n)$ наибольший простой делитель знаменателя дроби a_n, Nf некоторое определенное конечное число (не зависящее от переменного n). Свойство ряда рациональных дробей

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots. \tag{1'}$$

или строки

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

состоящее в том, что с бесконечным возрастанием n

$$\frac{\bar{p}(da_n)}{n^k} < Nf,$$

будем обозначать через $P[k]$, а сам ряд (1) или (1') через $P(k)$.

Свойство же

$$\frac{\lambda p(da_n)}{n^l} < Nf$$

будем обозначать через $L[l]$, а ряд, обладающий этим свойством, через $L(l)$.

Совокупность свойств $P[k]$, $L[l]$ будем обозначать через $A[k, l]$, а ряд, обладающий этим свойством, через $A(k, l)$.

При этом обозначении можно дать следующую *краткую* формулировку теореме Эйзенштейна [12]), по которой голоморфное разложение с рациональными коэффициентами (1) только тогда выражает *алгебраиче-*

---

[11]) Д. Мордухай-Болтовской. О некоторых арифметических свойствах регулярных интегралов линейных дифференциальных уравнений. Мат. Сб. Т. XXVI. Москва, 1907.

[12]) Eisenstein. Allgemeine Eigenschaft der Reihenentwikelungen aller algebraischen Functionen (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1882, S. 441), первое доказательство Heine (Crelles Journal, B. 48, S. 268), также Ch. Hermite. Oeuvres, t. III. Paris, 1912, p. 232.

скую функцию, если в знаменатели a_n входят простые числа, не превосходящие конечного числа, или полнее (захватывая и свойство, относящееся к показателям), если замена x на ky, где k некоторое целое число, приводит все коэффициенты y к целым числам.

Можно сказать, что *разложение (1) тогда только выражает алгебраическую функцию, если обладает свойством* $A[1, 1]$.

Теорема, высказанная Чебышевым и доказанная мной, утверждает, что для разложений (1) функций, выражаемых в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных, $\frac{p_n}{n}$ остается конечным с возрастанием n.

К этому свойству следует еще прибавить свойство, относящееся к любому простому множителю p, входящему в знаменатели a_n, и охарактеризовать разложения функций, выражаемых в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных, свойствами $P[1]$, $L[1]$ или $A[1, 1]$.

В настоящей статье я задаюсь целью доказать, что *разложение (1) интегралов уравнений Пенлевэ обладает тоже этими свойствами*

$$P[1],\ L[1] \text{ или } A[1.1].$$

Это свойство является характерным для этого типа дифференциальных уравнений первого порядка, так как алгебраическим дифференциальным уравнениям *общего* типа, согласно исследованиям Гурвича и моим, присущи свойства:

$$1)\ P[k],$$

$$2)\ M[\sigma]:\ \frac{\lambda_n(p)}{\sigma^n} < Nf,$$

где σ степень левой части ур. (3),

$$3)\ L_n[1]:\ \frac{\lambda_n(\bar{p})}{n} < Nf.$$

§ 4. Исследование следует вести в *более общей форме.*

Случай рациональных коэффициентов следует рассматривать, как частный случай более общей формы:

$$a_j = \frac{\Omega_j(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q, t)}{G_j(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)} \tag{9}$$

где Ω_j целый полином с коэффициентами, равными целым числам, от ξ_j, t, а G_j от ξ_j; ξ_j — трансцендентные числа, *алгебраически между собой независимые*, t определяется неприводимым в области $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ уравнением

$$\sum_{j=0}^{j=\sigma} \omega^{(j)}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)\, t^j = 0; \tag{10}$$

при этом мы можем предполагать, что ξ_j входят и в *коэффициенты* дифференциального уравнения (1).

Область $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_q)$ *голоидальна* [13]; в ней те же законы для арифметических операций, что в области целых чисел. Вот в этой области R и

[13]) Это доказывается в *трех* моих работах. О некоторых арифметических свойствах рег. инт. Мат. Сб. XXVI. 1907. Интегрирование трансцендентных функций. Изв. Варш. Унив. 1913. Sur les propriétés arithmétiques des développements holomorphes des fonctions exprimables en termes finis. Bulletin de Darboux. 1926.

следует вести исследование (как мы это делаем в других работах), расширяя понятия о $P[k]$ и $L[l]$, считая целую R-функцию (т. е. целую функцию с целыми коэффициентами от ξ_j) *конечной* при условии, что коэффициенты и степень ее остаются конечны.

В предельном случае, когда степень сводится к нулю, мы приходим к этим свойствам в *обычном* их понимании.

Но в виду сложности выражения при оперировании формой (9), мы все доказательства будем проводить для рациональных коэффициентов разложения (1), предлагая по образцу упомянутых наших работ соответствующей заменой целых чисел—целыми R-функциями от ξ_j распространить их и на общий случай.

Не следует также ограничиваться *голоморфными* разложениями (1), а брать *алгеброидальное* разложение общего типа (2).

При этом не трудно видеть, что, приводя подстановкой

$$x^{\frac{1}{\alpha}} = x'$$

разложение с дробными показателями к разложениям с целыми, свойство $A[k,l]$ мы оставляем неизменным. То же относится и к приведению последнего подстановкой

$$y = x'^{-l} z$$

к голоморфному разложению

$$z = c_0 + c_1 x' + c_2 x'^2 + \ldots c_n x'^n + \ldots$$

§ 5. Кроме голоидальности области ξ_j и обобщенного понятия от $P[k]$, $L[l]$, в настоящей работе мы используем и общие теоремы, относящиеся к свойствам результатов различных операций.

Совершенно элементарным путем доказывается, что

$$A_1(k,l) \pm A_2(k,l) = A(k,l),$$

$$A_1(k,l)\, A_2(k,l) = A(k,l),$$

$$\frac{A_1(k,l)}{A_2(k,l)} = A(k,l),$$

$$A'_1(k,l) = A(k,l),$$

только при $k \geqslant 1$

$$\int A_1(k,l)\,dx = A(k,l).$$

Вообще

$$\Phi[\overset{(i_1)}{A_1}(k,l),\ \overset{(i_2)}{A_2}(k,l), \ldots \overset{(i_s)}{A_s}(k,l)] = A(k,l), \tag{11}$$

где Φ символ операций рациональных, (i_k) операций дифференцирования $(i_k > 0)$ и интегрирования $(i_k < 0)$. К этому следует прибавить

$$e^{\int A_1(k,l)\,dx} = A(k,l),$$

$$lg\, A_1(k,l) = A(k,l).$$

Анализ вывода теоремы Кенигсбергера[14]) дает возможность установить *инвариантность* $A(k,l)$ и при *всякой иррациональной алгебраической*

---

[14]) L. Koenigsberger. Über den Eisensteinschen Satz. Crelle's Journal. Bd. 130; об этой теореме см. также: Koch. Sur une propriété arithmétique etc. Arkiv für Mate-

операции, что можно выразить так:

если $$A_0(k,l) + A_1(k,l)y + \ldots + A_m(k,l)y^m = 0\,, \tag{12}$$

то $$y = A(k,l)\,.$$

К этим результатам прежних моих работ прибавлю еще следующее.

Если разложению η в ξ

$$\eta = C_0 + C_1\,\xi + C_2\,\xi^2 \ldots + C_n\,\xi^n + \ldots \tag{13}$$

присуще свойство $A[k,l]$ и если разложению ξ в x

$$\xi = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{14}$$

(дающему $\xi = 0$ при $x = 0$) присуще свойство $A[k,l]$, то то же свойство присуще разложению η в x

$$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots \tag{15}$$

В самом деле, коэффициент в разложении (15) при x^n может получиться только из членов $C_i\,\xi^i$, $i \leqslant n$ разложения (13), так что

$$a_n = \sum_{i=1}^{i=n} k_i\,,$$

где
$$k_i = C_i \sum_i \frac{i!}{m_1!\,m_2!\ldots m_r!}\,b_1^{m_1} b_2^{m_2}\ldots\ldots b_r^{m_r}\,,$$

где $\sum\limits_i$ распространена на значения m_j, удовлетворяющие условиям

$$m_1 + m_2 + \ldots m_r = i\,,$$

$$m_1 + 2m_2 + \ldots\ldots + rm_r = n.$$

Наибольший простой делитель, входящий в $d(a_n)$, следует искать среди наибольших простых делителей, входящих в $d(k_i)$, а последние среди наибольших делителей, входящих в

$$d(b_1^{m_1})\,d(b_2^{m_2})\ldots d(b_r^{m_r})\,m_1!\,m_2!\ldots m_r!\,,\qquad r < i.$$

Так как для них $\dfrac{\overline{p}}{ik} \leqslant Nf$, то то же относится и к $d(a_n)$, и таким образом, свойство $P[k]$ устанавливается.

Исследуем еще, с каким показателем входит любой простой делитель p в $d(a_n)$.

Для этого исследуем верхнюю границу для показателя p в произведении.

$$m_1!\,m_2!\ldots\ldots m_r!\;d(b_1^{m_1})\,d(b_2^{m_2})\ldots\ldots d(b_r^{m_r})\,.$$

Показатель $\lambda^{(j)}(p)$ в $m_j!$ определяется по известной формуле [15]

$$\lambda^{(j)}(p) = \sum_{g=1}^{g=q} E\left(\frac{m_j}{p^g}\right)\,, \tag{16}$$

---

matik, Astronomi och Fysik, Bd. 1, S. 627—641. М. Субботин. О форме коэффициентов степенных разложений алгебраических функций. Изв. Дон. Полит. Инст. 1919, т. VII, отд. II.

[15] См., напр., Ю. Сохоцкий. Высшая Алгебра, т. II.

где q наибольшее значение g, для которого

$$\frac{m_j}{p^g} \geqslant 1,$$

E обозначает наибольшее целое число, входящее в $\frac{m_j}{p^g}$.

Из (16):

$$\lambda^{(j)}(p) < m_j\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^g}\right) < \frac{m_j}{p-1}$$

$$\frac{\lambda^{(j)}(p)}{m_j} < \frac{1}{p-1} < 1 \tag{17}$$

Замечая, что, если

$$\sum_{j=1}^{j=r} jm_j = n, \text{ то } \sum j \leqslant n,$$

получаем из (17)

$$\sum_j \lambda^{(j)}(p) \leqslant \sum m_j \leqslant n.$$

Поэтому, если через $\bar{\lambda}(p)$ обозначить показатель p в произведении

$$m_1!\, m_2! \ldots m_r!,$$

то

$$\frac{\lambda(p)}{n} < 1. \tag{18}$$

Далее, если

$$\frac{\lambda p(db_j)}{j^l} < N_j f, \quad \frac{\lambda p(db_j^{\,m_j})}{j^l} < m_j N_j f;$$

то

$$\sum_j \lambda p(db_j^{\,m_j}) < \sum_j N_j f m_j j^l \leqslant Nf(\Sigma m_j f)^l < N f n^l,$$

где Nf наибольшая из $N_j f$.

Таким образом,

$$\frac{\lambda p[db_1^{\,m_1} b_2^{\,m_2} \ldots b_r^{\,m_r}]}{n^l} < Nf.$$

Но

$$\lambda p(dk_i) = \lambda p\,[db_{m_1} b_{m_2} \ldots b_{m_r}] + \bar{\lambda}(p) < Nfn^l + N'fn < \bar{N}fn^l$$

$$\bar{N}f = Nf + N'f.$$

Таким образом, свойство $L[l]$ присуще k_i и конечно и сумме $a_n = \Sigma k_i$.

§ 6. Первый случай Пенлевэ (см. § 2), а именно, когда y алгебраическая функция от x, не требует исследования, т. к. уже в силу следствий теоремы Кенигсбергера y присуще свойство $A[1, 1]$.

Если бы уравнение $f(x, y, y') = 0$ было бы *алгебраическим* только относительно y, y' с коэффициентами $A(k,l)$ относительно x, то согласно тем же исследованиям Пенлевэ и теореме Кенигсбергера мы получили бы y в форме разложения $A(k,l)$. Но второй, а в особенности третий случай представляют большие затруднения.

Останавливаясь на *втором*, делаем важное замечание.

Из ур. (4) имеем

$$\eta = sn\left[\int g(x)dx\right] = sn[h(x) + C] = snu\,, \qquad u = h(x) + C,$$

где C постоянное, которое может быть, как алгебраическим, так и трансцендентным, $h(x)$ алгеброид.

Если y алгеброид, то и η алгеброид от x; $u = h(x) + C$ алгеброид от x. Но в таком случае *этот алгеброид не обращается в* ∞ *при* $x = 0$.

В самом деле при $x = \infty$, $u = \infty$, η алгеброид от x, x алгеброид от u и потому и η алгеброид от u при $u = \infty$, чего быть не может, ибо $u = \infty$, как известно, существенно *особенная точка* для $\eta = snu$.

Таким образом,

$$h(x) = \sum_{j=1}^{j=\infty} a_j x^{\frac{j}{d}}$$

(относя a_0 к C); затем, пользуясь формулой сложения эллиптических функций, имеем

$$\eta = sn(u + C) = \frac{snu\,cn\,C dn\,C + sn\,C\,cnu dnu}{1 - k^2 sn^2 u\,sn^2 C} \qquad (19)$$

Если уравнение Пенлевэ (3) алгебраическое, то u есть $A(1;1)$, и если нам удастся убедиться, что snu есть $A(1,1)$, то то же следует сказать и о cnu, dnu, как алгебраических функциях snu, а также и о всем выражении (19), построенном с помощью операций § 5, включая snC и k^2 в случае их трансцендентности в число ξ_j.

§ 7. Переходим теперь к установке свойства $A[1,1]$ для snu.

Замечая, что [16])

$$snu = \frac{Al(u)_1}{Al(u)}\,, \qquad (20)$$

где $Al(u)_1$, $Al(u)$—Вейерштрассовы функции, определяемые уравнениями

$$\frac{\partial^2 Al(u)}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial Al(u)}{\partial u} + 2kk'^2 \frac{\partial Al(u)}{\partial k} + k^2 u Al(u) = 0\,, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2 Al(u)_1}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial Al(u)_1}{\partial u} + 2kk'^2 \frac{\partial Al(u)_1}{\partial k} + (k'^2 + k^2 u^2) Al(u)_1 = 0\,, \qquad (22)$$

которые дают для коэффициентов голоморфных разложений

$$Al(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots,$$

$$Al(u)_1 = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \ldots$$

формулы приведения

$$(2j+2)(2j+1)a_{2j+1} + 2jk^2 a_{2j} + 2kk'^2 \frac{da_{2j}}{dk} + k^2 a_{2j-2} = 0\,, \qquad (23)$$

$$j(j-1)a_j + 2(j-2)k^2 a_{j-2} + 2kk'^2 \frac{da_{j-2}}{dk} + k^2 a_{j-4} = 0. \qquad (24)$$

[16]) Hermite. Note sur les fonctions elliptiques при курсе Lacroix, стр. 460. Laurent. Traité d'Analyse, t. IV.

Отсюда получаются для $Al(u)$ и $Al(u)_1$ разложения:

$$Al(u) = 1 - A_2\frac{u^4}{4!} + A_3\frac{u^6}{6!} + \ldots\ldots + (-1)^{m-1}A_m\frac{u^{2m}}{2m!} + \ldots\ldots,$$

$$Al(u)_1 = u - B_1\frac{u^4}{3!} + B_3\frac{u^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^m B_m\frac{u^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots,$$

$A_2 = 2k^2$, $B_1 = 1 + k^2$,

$A_3 = 8(k^2 + k^4)$, $B_2 = 1 + k^4 + 4k^2$,

$A_4 = 32(k^2 + k^6) + 68k^4$, $B_3 = 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4)$,

$A_5 = 128(k^2 + k^8) + 480(k^4 + k^6)$, $B_4 = 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6k^4$,

. . . .

С помощью принципа *полной математическй индукции* убеждаемся, что A_m, B_m целые функции с целыми коэффициентами от k^2.

Предположим, что это уже имеет место при $g < j$, т. е.

$$Al(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots a_n u^n + \ldots,$$

причем

$$a_{2g} = \frac{\omega^{(g)}(k^2)}{2g!},\ a_{2g-1} = 0, \qquad g < j, \tag{25}$$

где $\omega^{(g)}(k^2)$ означает полином с целыми коэффициентами от k^2,—то тоже

$$a_{2j} = \frac{\omega^{(j)}(k^2)}{2j!},\ a_{2j+1} = 0\,.$$

Чтобы в этом убедиться, следует только подставить в формулу приведения (23), вместо

$$(a_{2j-2},\ a_{2j-4})\,(a_{2j-1},\ a_{j-3}),$$

их выражение (25), что даст

$$a_{2j} = \frac{\omega^{(j)}(k^2)}{2j},\ a_{2j+1} = 0\,.$$

При этом ясно, что степень ω с повышением значка на единицу повышается также на единицу, так что $\omega^{(2g)}(k^2)$ степени g—1-ой относительно k^2. Совершенно так же устанавливается и форма коэффициентов $Al(u)$.

Если k^2 трансцендентное число, то свойства $A[1,1]$ очевидно, так как в числителях A_m, B_m стоят целые R-функции (полиномы с целыми коэффициентами от k^2) в знаменателях же $m!$, произведения, делители которых удовлетворяют условиям

$$\frac{\bar{p}}{m} < Nf,\ \frac{\lambda(p)}{m} < Nf.$$

Если же k^2 алгебраическое число, то A_m сводится к виду

$$A_m = \frac{\theta_{2g}}{2g!\,N^{g-1}},$$

где N целое число, не зависящее от $m = 2g$, и мы приходим к тому же выводу.

Таким же образом исследуется и B_m.

Но на основании § 5, свойство $A[1,1]$ принадлежит и частному

$$snu = \frac{Al(u)_1}{Al(u)}.$$

§ 8. Переходя к третьему случаю Пенлевэ, скажем еще несколько слов об уравнении Рикатти

$$\alpha(x)[\eta' + \eta^2] + \beta(x)\eta + \gamma(x) = 0. \tag{6}$$

$\alpha(x)$, $\beta(a)$, $\gamma(x)$ можно конечно предполагать не обращающимися в ∞ при $x=0$ (в противном случае следует только умножить на $x^{\frac{\mu}{d}}$).

Кроме того можно предполагать, что $\alpha(x)$, $\beta(x)$ $\gamma(x)$а, также и η разлагаются по целым степеням x, так как подстановкой $x^{\frac{1}{d}} = x'$ придем к этому случаю (не изменяя свойства $A[k,l]$).

Далее мы можем предполагать, что η не обращается в ∞ при $x=0$. В противном случае, обозначая через $\omega\left(\frac{1}{x}\right)$ главную часть разложения η, положением

$$\eta = \omega\left(\frac{1}{x}\right) + \bar{\eta},$$

$$\eta' = \omega'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \bar{\eta}'$$

уравнение Рикатти (6) приводим к виду:

$$\alpha_1(x)[\bar{\eta}' + \eta^2] + \beta_1(x)\bar{\eta} + \gamma_1(x) = 0,$$

$$\alpha_1(x) = \alpha(x),$$

$$\beta_1(x) = 2\alpha(x)\omega\left(\frac{1}{x}\right) + \beta(x),$$

$$\gamma_1(x) = -\frac{\alpha(x)\omega'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} + \alpha(x)\omega^2\left(\frac{1}{x}\right) + \beta(x)\omega\left(\frac{1}{x}\right) + \gamma(x),$$

или, по умножении на надлежаще выбранную степень: x^μ

$$\bar{\alpha}(x)[\eta' + \bar{\eta}^2] + \bar{\beta}(x)\bar{\eta} + \bar{\gamma}(x) = 0, \tag{8}$$

где $\bar{\alpha}(x)$, $\bar{\beta}(x)$, $\bar{\gamma}(x)$ голоморфные разложения относительно x.

Уравнение ($\bar{6}$) подстановкой

$$\zeta = e^{\int \bar{\eta} dx}$$

приводится к уравнению

$$\bar{\alpha}(x)\zeta'' + \bar{\beta}(x)\zeta' + \bar{\gamma}(x)\zeta = 0. \tag{8}$$

Если мы установим свойство $A[1,1]$ для $\bar{\zeta}$, то оно будет иметь место и для $\bar{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta}$ и для y.

Из того, что η не обращается в ∞ при $x=0$, можно вывести следствие, что ур. (6) или (8) может быть всегда преобразовано к такому виду, что или $\alpha(0) \neq 0$ или, если $\alpha(0)=0$, то $\beta(0) \neq 0$.

В самом деле, при $\bar{\alpha}(0)$ и $\bar{\beta}(0)=0$ из ур. (6) следует, что и $\gamma(0)=$ о.

Пусть
$$\bar{\alpha}(x) = \alpha_1 x^s + \alpha_2 x^{s+1} + \ldots\ldots,$$
$$\bar{\beta}(x) = \beta_1 x^t + \beta_2 x^{t+1} + \ldots\ldots,$$
$$\gamma(x) = \gamma_1 x^u + \gamma_2 x^{u+1} + \ldots\ldots;$$

по сокращении ур. на x^μ, где μ наименьшее из чисел s, t, u, получаем

$$\underline{\underline{\alpha}}(x)[\eta' + \bar{\eta}^2] + \underline{\underline{\beta}}(x)\bar{\eta} + \underline{\underline{\gamma}}(x) = 0\,, \tag{$\underline{\underline{6}}$}$$

Здесь или $\underline{\underline{\alpha}}(0) \neq 0$ или $\underline{\underline{\alpha}}(0) \neq$ о, так как если бы $\underline{\underline{\alpha}}(0) = \bar{\beta}(0) = 0$, то должны были бы иметь и $\underline{\underline{\gamma}}(0=0)$, и сокращение не было бы произведено полностью.

§ 9. При выводе свойств $P[1]$ и $L[1]$ следует различить два случая.

1) *Общий*, когда в уравнении

$$\alpha(x)\zeta'' + \beta(x)\zeta' + \gamma(x)\zeta = 0\,, \tag{8}$$
$$\alpha(0) \neq 0\,;$$

2) *Специальный* [17]), когда

$$\alpha(0) = 0\,,\ \beta(0) \neq 0.$$

В первом случае последовательное дифференцирование дает

$$\zeta^{(i+2)} = \frac{\sum_{j=1}^{j=i+2} a_j^{(i)}(x)\zeta^{(i+2-j)}}{a_0(x)}\,, \tag{26}$$

где $a^{(i)}$, a_0 голоморфные разложения с целыми коэффициентами.

По подстановке в (26) вместо $\zeta^{(k)}$ $k>2$ аналогичных выражений, получаем

$$\zeta^{i+2} = \frac{a_{i0}(x)\zeta' + a_{i1}(x)\zeta}{[a_0(x)]^i}\,,$$

а при $x=0$

$$\zeta_0^{(i+2)} = \frac{a_{i0}(0)\zeta'_0 + a_{i1}(0)\zeta_0}{[a_0(0)]^i}\,,$$

где $a_{i0}(0)$, $a_{i1}(0)$, $a_0(0)$ целые числа, откуда для коэффициента получается форма

$$a_{i+2} = \frac{\Omega_{i+2}}{\overline{i+2}!\, c a_0{}^i}\,. \tag{27}$$

[17]) В заметке в Comptes Rendus мы ссылаемся на теорему Какейя: Soichi Kakeya. On a power series with Rational Coefficients satisfying an Algebraic Differential Equation. § 1, 2. The Science Reports of the Tôhoku Imperial University. First Series. Vol. IV, № 1, p. 6, которая представляет прекрасное дополнение к исследованиям Гурвича, из которого можно вывести, что и в случае, когда $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} =$ о, интегралы алгебр. диффер. уравнения $f(x, y, y', .. y^{(m)}) =$ о могут обладать свойствами $P[1]$, что и имеет место в специальном случае настоящего §.

Из этой формы, замечая, что множитель $\bar{p}$ должен входить в $(\overline{i+2}!)$, (c или α_0^i) получаем в первом случае $\frac{\bar{p}}{n} < Nf$, $n = i+2$, во втором $\bar{p} < Nf$.

Кроме того,

$$\lambda(p) < \lambda'(p) + \lambda''(p) + \lambda'''(p).$$

$\lambda'(p)$ показатель p в $\overline{i+2}!$ $\lambda''(p)$ в a_0^i, $\lambda'''(p)$ в c.

Но

$$\lambda'(p) < N'fn, \qquad n = i+2,$$

$$\lambda''(p) < N''fn,$$

$$\lambda'''(p) < N'''f,$$

так что

$$\frac{\lambda(da_n)}{n} < Nf = N'f + N''f + N'''f,$$

т. е. устанавливается и второе свойство $L[1]$.

Для исключительного случая

$$\alpha(x)\zeta^{(i+2)} + [i\alpha'(x) + \beta(x)]\zeta^{(i+1)} + \ldots\ldots = 0$$

при $x = 0$

$$[i\alpha'(0) + \beta(0)]\zeta^{(i+1)} + \ldots\ldots = 0$$

$$\zeta_0^{(i+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{j=i+1} a_j^{(i)}(0)\zeta^{(i+1-j)}}{i\alpha'(0) + \beta(0)}; \tag{28}$$

подставляя сюда значения для $\zeta^{(k)}$ для $k \geqslant p$, где значение p выберем так, что при $j > p$, $j\alpha'(0) + \beta(o)$ не обращается в нуль, что можно всегда сделать, если $\beta(0) \neq 0$, получим

$$\zeta_0^{(i+1)} = \frac{\sum_{j=0}^{j=p} a_{ij}(0)\zeta_0^{p-j}}{\prod_{j=p+1}^{j=i}\left(j\alpha'(0) + \beta(0)\right)}, \tag{29}$$

а отсюда, вместо формы (27), получаем для коэффициента форму:

$$a_{i+1} = \frac{\Omega_{i+1}}{\overline{i+1}!\, c \prod_{j=p+1}^{j=i}[j\alpha'(0) + \beta(0)]}.$$

Свойства $P[1]$, $L[1]$ будут доказаны, если докажем, что

$$\frac{p[\Phi_n]}{n} < Nf, \quad \frac{\lambda p[\Phi_n]}{n} < Nf,$$

$$\Phi_n = \prod_{j=p+1}^{j=n}[j\alpha'(0) + \beta(0)].$$

Первое вытекает M того, что $\bar{p}$ меньше делителя $j\alpha'(0)+\beta(0)$, так что при $\alpha'(0)$ не больше

$$(j+1)\,M<(i+1)\,M=n\,M,$$

где M наибольшее из чисел $|\alpha'(0)|$ и $|\beta(0)|$, а при $\alpha'(0)=0$

$$\bar{p}\leqslant|\beta(0)|$$

Для вывода второго замечаем, что

$$\lambda p(\Phi_n)<\lambda p(\bar{\Phi}),$$

где при $\alpha'(0)\neq 0$

$$\bar{\Phi}=\prod_{j=1}^{j=n}M_j=M^n\,n!$$

$$\lambda p(\bar{\Phi})<\lambda p(M^n)+\lambda p(n!)<nN'f+nN''f<nNf.$$

Если $\alpha'(0)=0$, то,

$$\bar{\Phi}=[\beta(0)]^n$$

и конечно вывод тот же.

Sur les propriétés arithmétiques des intégrales des équations différentielles du premier ordre de Painlevé.

Par D. Mordoukhaj-Boltovskoj (Rostow s. D.)

Les développements holomorphes ou en général algébroïdes

$$y=x^{-\frac{l}{d}}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\,x^{\frac{j}{d}}$$

avec des coefficients rationnels a_j de l'intégrale de l'équation différentielle du premier ordre de Painlevé (c'est-à-dire avec un nombre fixe des valeurs autour des points critiques) ont la propriété suivante:

Si $\bar{p}$ est le plus grand diviseur premier du denominateur de a_j, p un diviseur premier quelconque et $\lambda(p)$ son exposant, alors on a

$$\frac{\bar{p}}{n}<Nf,$$

$$\frac{\lambda(p)}{n}<Nf.$$

Nf étant un nombre fini indépendant de n.

(Bull. de la Soc. Phys.-Math. de Kazan, S. III, t. 2. 1927).